සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
(முழுப் பதிப்புரிமையுடையது)
All Rights Reserved]

16314

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1996 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1996 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1996

ව්‍යවහාරික ගණිතය II
பிரயோக கணிதம் II
Applied Mathematics II

02	
S	II

පැය තුනයි / மூன்று மணி / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

අවශ්‍ය තැන්හි ගුරුත්වජ ත්වරණය, $g = 10\ \text{m s}^{-2}$ ලෙස ගන්න.

1. (අ) $(y^2 + 1)(x + 2)\dfrac{dy}{dx} = y\,(y^2 + 3)$

අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(ආ) u යනු x හි ශ්‍රිතයක් විට, $u = x + 2y$ ආදේශය භාවිත කර,

$$2\,\frac{dy}{dx} = \tan^2 (x + 2y)$$

අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(ඇ) මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන කිසියම් වක්‍රයක් කෙසේ ද යත්, එම වක්‍රයට ස්පර්ශකයේ (x, y) ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයත් x − අක්ෂයත් අතර කොටසෙහි දිග, ස්පර්ශකයේ x − අන්තඃඛණ්ඩයට සමාන වන පරිදි ය. වක්‍රයේ සමීකරණය සොයා ජ්‍යාමිතික ලෙස එය විවරණය කරන්න.

2. පිළිවෙළින් a හා b දිගින් යුත් A හා B දුම්රිය දෙකක්, සෘජු, සමාන්තර දුම්රිය පීලි මත ගමන් කරයි. ආරම්භයේ දී ($t = 0$ මොහොතේ දී) A හි ඉදිරිපස B හි පිටුපසට යන්තම් පිටුපසින් තිබෙන අතර නිශ්චලතාවේ සිට එක්වර ම A දුම්රිය f ඒකාකාර ශීඝ්‍රතාවෙන් ද, B දුම්රිය $f'\,(< f)$ ඒකාකාර ශීඝ්‍රතාවෙන් ද ත්වරණය වීමට පටන් ගනියි. $t = t_1$ මොහොතේ දී A හි පිටුපස B හි ඉදිරිපස යන්තම් පසු කරන විට, A දුම්රිය එතෙක් ලබාගත් ප්‍රවේගය නියතව පවත්වා ගැනීම අරඹයි. $t = t_2$ මොහොතේ දී B හි ඉදිරිපස යළිත් A හි පිටුපස වෙත ළඟා වන විට දුම්රිය දෙකම, එනම් A දුම්රිය f' ඒකාකාර ශීඝ්‍රතාවෙන් ද B දුම්රිය f ඒකාකාර ශීඝ්‍රතාවෙන් ද මන්දනය වීමට ආරම්භ වෙයි. B හා A දුම්රිය දෙක පිළිවෙලින් $t = t_3$ මොහොතේ දී හා $t = t_4\ (> t_3)$ මොහොතේ දී නිශ්චලතාවට පැමිණෙයි. දුම්රිය දෙකේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල වක්‍රවල දළ සටහන් එකම රූප සටහනක අඳින්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ

(i) $t_1^2 = \dfrac{2\,(a + b)}{f - f'}$,

(ii) $t_2 = \left(\dfrac{2f}{f'} - 1\right) t_1$,

(iii) $t_4 - t_3 = \dfrac{(f - f')^2}{ff'}\, t_1$

බව පෙන්වන්න.

තවද, ගමන අවසානයේ දී B ට සාපේක්ෂව A ගේ පිහිටීම, $t = t_1$ මොහොතේ දී පිහිටීමම වෙයි නම්,

$$\frac{f}{f'} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

බව පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. m ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශුවක්, u ප්‍රවේගයක් ඇතිව සිරස් ලෙස උඩු අතට ප්‍රක්ෂේපණය කැරෙන්නේ mkv^2 ප්‍රතිරෝධයක් සහිත මාධ්‍යයක් තුළ ය. මෙහි v යනු ප්‍රවේගය ද k යනු නියතයක් ද වේ. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ විට $k = g\left(\frac{\tan\alpha}{u}\right)^2$ ලෙස ගැනීමෙන්,

(i) අංශුව එළැඹෙන උපරිම උස $\frac{1}{k}\log_e \sec\alpha$ බවත්

(ii) අංශුව උපරිම උසට ළඟා වීමට ගන්නා කාලය $\frac{\alpha u}{g}\cot\alpha$ බවත්

(iii) අංශුව, එහි ප්‍රක්ෂේපණ ලක්ෂ්‍යය වෙත ආපසු ළඟා වන වේගය $u\cos\alpha$ බවත්

පෙන්වන්න.

4. ගුවන් යානයක, නිසල වාතයේ දී වේගය u km h⁻¹ වෙයි. පෘථිවියට සාපේක්ෂව එහි ගමන් මග වන්නේ පාදයක් d km දිග $ABCDEFA$ සවිධි ෂඩස්‍රයකි. $\overrightarrow{AB}$ දිශාවට v km h⁻¹ ($v < u$) ප්‍රවේගයකින් හමන සතත ඒකාකාර සුළඟක් ඇත. ෂඩස්‍රයේ පාද හය ඔස්සේ වන ගමන් සියල්ල ම සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ (හැකි නම් එකම රූප සටහනක) අඳින්න. ඉංග්‍රීසි අකුරුවල අනුපිළිවෙලින් දක්වෙන අතට ගමන් වාරයක් සම්පූර්ණ කිරීමට ගුවන් යානයට ගත වන මුළු කාලය, පැය

$$\frac{2d}{u^2 - v^2}\left[u + \sqrt{4u^2 - 3v^2}\right]$$

බව පෙන්වන්න.

සුළඟට සාපේක්ෂව ගුවන් යානයේ පෙත සංවෘත වක්‍රයක් ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

5. වස්තුවක් නිශ්චලතාවේ සිට සරල රේඛාවක් ඔස්සේ චලනය වන්නේ, ගමන් කළ x දුරෙහි ශ්‍රිතයක් වන $f(x)$ ත්වරණයක් සහිතව ය. $f(x)$ වක්‍රය යට ඇති වර්ගඵලය A නම්, එම දුර ගමන් කිරීමේ දී වස්තුව විසින් ලබා ගන්නා v වේගය, $v = \sqrt{2A}$ යන්නෙන් ලැබෙන බව පෙන්වන්න.

ස්කන්ධය 800 kg ක් වන මෝටර් රථයක් නිශ්චලතාවේ සිට ආරම්භ කර සෘජු සමතල පාරක් දිගේ චලනය වෙයි. රථය 400 N ක නියත ප්‍රතිරෝධයකට භාජනය වන අතර එන්ජිමේ ඇදිල්ල ගමන් කළ දුර සමග ඒකාකාර ලෙස වැඩි වන්නේ ආරම්භයේ දී 1200 N කින් පටන් ගෙන, මෝටර් රථය 150 m ක දුරක් ගමන් කළ විට 3600 N තෙක් වැඩි වන පරිද්දෙනි. ත්වරණ-දුර වක්‍රයේ දළ සටහන අඳින්න. ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ 150 m ගමන් කළ පසු මෝටර් රථය ලබා ගන්නා වේගය ගණනය කරන්න.

එම තත්ත්ව යටතේ ම, තිරසට $\sin^{-1}\left(\frac{1}{20}\right)$ ක කෝණයකින් ආනත පාරක් දිගේ ඉහළට 150 m ක් ගමන් කිරීමේ දී රථය ලබා ගන්නා වේගය ද සොයන්න.

6. ජල පොම්පයක්, තත්පරයට ජලය 12 kg ක් 7·5 m උසකට ඔසවයි. ජලය පිට වන්නේ 10 m s⁻¹ ක වේගයක් ඇති දිය පිහිරක් ලෙස ය. එක් එක් තත්පරයේ දී ජලයට ලබා දෙන යාන්ත්‍රික ශක්තිය සොයන්න. ඒ නයින් පොම්පයෙන් නිපදවන සඵල ජවය 1·5 kW බව පෙන්වන්න.

තිරසට 30° ක කෝණයක් ඉහළින් වන දිශාවකට දිය පිහිර එල්ල කර තිබේ නම් ජලය නවත් කවර උසක් ලබා ගන්නේ දැයි සොයන්න.

දිය පිහිර එහි ඉහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ දී සිරස් බිත්තියකට හරි කෙළින් ම වැදී එහි දී ජලයේ මුළු ගම්‍යතාවම හානි වෙයි. බිත්තිය මත යෙදෙන බලය ආසන්න වශයෙන් 104 N බව පෙන්වන්න.

7. ගම්‍යතා සංස්ථිති මූලධර්මය සහ ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය ප්‍රකාශ කරන්න.

පිළිවෙළින් ස්කන්ධය m ද M ද වන P, Q අංශු දෙකක්, ස්වාභාවික දිග l ද මාපාංකය λ ද වන ලුහු දුන්නක් මගින් ඈඳ, ඒවා l දුරක පරතරයකින් පිහිටන සේ සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා තිබේ. P අංශුව u ප්‍රවේගයෙන් Q දෙසට ප්‍රක්ෂේපණය කැරෙයි. t වේලාවේ දී P අංශුව චලනය වූ දුර x ලෙසත් දුන්නේ දිග y ලෙසත් ගෙන ගම්‍යතා සමීකරණයත් ශක්ති සමීකරණයත් ලියා දක්වන්න. ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ

(i) දුන්නේ විශාලතම සම්පීඩනය

$$\sqrt{\frac{l m M}{\lambda (m + M)}}\, u$$

බව පෙන්වා, මෙය සිදුවන අවස්ථාවේ දී ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට සාපේක්ෂව P අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයන්න;

(ii) දුන්න යළි එහි ස්වාභාවික දිග තෙක් ප්‍රසාරණය වූ විට P ස්කන්ධයේත් Q ස්කන්ධයේත් ප්‍රවේග පිළිවෙළින්

$$\left(\frac{m - M}{m + M}\right) u \quad ද \quad \frac{2mu}{m + M} \quad ද$$

බව පෙන්වන්න.

8. M ස්කන්ධයෙන් ද තිරසට α කෝණයකින් ආනත උඩු මුහුණතකින් ද යුත් සුමට කුඤ්ඤයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසල ව තිබේ. සිරස් ලෙස වැටෙන m ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශුවක් කුඤ්ඤයේ උඩු මුහුණතෙහි වන P ලක්ෂ්‍යයේ ගැටෙයි. ගැටුමට මොහොතකට පෙර අංශුවේ ප්‍රවේගය u වෙයි. අංශුවත් කුඤ්ඤයත් අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e නම් කුඤ්ඤය,

$$V = \frac{mu\,(1 + e)\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

ප්‍රවේගයෙන් චලනය වීමට පටන් ගන්නා බව පෙන්වන්න. කුඤ්ඤයේ උඩු මුහුණත සෑහෙන තරම් දිග නම්, යළිත් එම මුහුණතේ ගැටීමට අංශුවට ගත වන කාලය සොයන්න. දෙ වැනි ගැටුමේ Q ලක්ෂ්‍යය,

$$PQ = \frac{2e\,(1 + e)\,(M + m)\,u^2\sin\alpha}{(M + m\sin^2\alpha)\,g}$$

යන්නෙන් ලැබෙන බව අපෝහණය කරන්න.

9. A, B හා C යනු සමාන කුඩා ගෝල තුනකි. $2a$ දිගින් යුත් අප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගින් A හා B ද සර්වසම තන්තුවක් මගින් B හා C ද සම්බන්ධ කර තිබේ. ඒවා සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත්තේ, A ත් B ත් අතර a දුරක පරතරයකුත් B ත් C ත් අතර ද a දුරක පරතරයකුත් තිබෙන සේ A හා B ගේ කේන්ද්‍ර රේඛාවට ලම්බව B හා C ගේ කේන්ද්‍ර රේඛාව පිහිටන පරිද්දෙනි. C ගෝලය u ප්‍රවේගයෙන් $\overrightarrow{BC}$ දිශාවට ප්‍රක්ෂේපණය කැරෙයි. AB තොබුරුල් වූ විගස A ගෝලයේත් C ගෝලයේත් වේගයන් නිර්ණය කරන්න. මේ මොහොතේ දී B ගේ ප්‍රවේගය, C හි ආරම්භක දිශාව සමඟ $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{5}$ කෝණයක් සාදන දිශාවකට $\frac{2\sqrt{7}u}{13}$ බව පෙන්වන්න.

තවද, චාලක ශක්තියේ භාගික හානිය, BC තොබුරුල් වන විට $\frac{1}{2}$ ක් ද AB තොබුරුල් වන විට $\frac{8}{13}$ ක් ද බව පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. ස්වාභාවික දිග l ද ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය λ ද වන ලුහු තන්තුවක එක් කෙළවරකට m ස්කන්ධයෙන් යුත් P අංශුවක් ඇඳ ඇති අතර එහි අනෙක් කෙළවර O අචල ලක්ෂ්‍යයකට සවි කර තිබෙයි. l දිගින් යුත් ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරකට ස්කන්ධය m ම වූ Q අංශුවක් ද අනෙක් කෙළවර P ට ද ගැට ගසා ඇත. ආරම්භයේ දී, සිරස් සරල රේඛාවක OPQ පිහිටන සේ ද OQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P වන පරිදි l ස්වාභාවික දිගක් PO ට තිබෙන සේ ද පද්ධතිය නිශ්චලතාවේ තබා ඉක්බිති එය නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හරිනු ලැබෙයි. t වේලාවේ දී OP දිග $l + x$ ය. P අංශුවත් Q අංශුවත් සඳහා චලිත සමීකරණ ලියා දක්වන්න. ඒ නයින්

$$\ddot{x} + \omega^2\left(x - \frac{g}{\omega^2}\right) = 0$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි $\omega^2 = \dfrac{\lambda}{2ml}$.

t වේලාවේ දී P අංශුවේ පිහිටීම, $x = \dfrac{g}{\omega^2} + A\cos\omega t + B\sin\omega t$

යන්නෙන් දෙනු ලැබෙයි නම්, A හා B නියතවල අගයයන් නිර්ණය කරන්න.

ඒ නයින් (i) පසුව එළැඹෙන චලිතයේ දී OP තන්තුවේ දිග කිසි විටෙක l ට අඩු නොවන බව ද

(ii) PQ තන්තුවේ ආතතිය $2mg\sin^2\dfrac{\omega t}{2}$ බව ද

පෙන්වන්න.

ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවේ උපරිම විතතිය $2l$ නම් λ හි අගය සොයා පළමු වැනි වරට උපරිම විතතිය ලබා ගන්නා වේලාව $\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ බවත් පෙන්වන්න.

11. m ස්කන්ධයෙන් යුත් කුඩා P මුදුවකට, සිරස් තලයක සවි කර තිබෙන කේන්ද්‍රය O ද අරය a ද වන සුමට වෘත්තාකාර කම්බියක සර්පණය වීමට නිදහස ඇත. කම්බියේ ඉහළම A ලක්ෂ්‍යයට මුදුව ඇඳ ඇත්තේ ස්වාභාවික දිග a ද ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය mg ද වන ලුහු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගිනි. මුදුව, කම්බියේ පහළම B ලක්ෂ්‍යයේ තබා කම්බියට ස්පර්ශක දිශාවකට u $(> \sqrt{2ga})$ තිරස් ප්‍රවේගයක් එයට දෙනු ලැබෙයි. t වේලාවේ දී $\widehat{BOP} = \theta$ ලෙස ගෙන ස්පර්ශක දිශාව ඔස්සේ අංශුව සඳහා චලිත සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $0 \le \theta \le \dfrac{2\pi}{3}$ විට

$$a^2\dot{\theta}^2 = u^2 - 4ga\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

බව පෙන්වන්න.

තවද, $u \le \sqrt{3ga}$ වෙයි නම්, මුදුව ක්ෂණික නිශ්චලතාවට පත් වන්නේ OP රේඛාව උඩු සිරස සමඟ $\cos^{-1}\left(\dfrac{u^2 - ga}{2ga}\right)$ කෝණයක් සාදමින් බවත් පෙන්වන්න.

12. ස්කන්ධය M ද අරය a ද වන ඒකාකාර වෘත්ත තැටියක, එහි තලයට ලම්බ තැටියේ කේන්ද්‍රය හරහා යන අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය $\dfrac{1}{2}Ma^2$ බව සාධනය කරන්න.

ඒකාකාර වෘත්ත තැටියක ආකාරයෙන් ඇති ස්කන්ධය M ද අරය a ද වන කප්පියක් වටා යන l දිගැති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට m සහ $m'(< m)$ ස්කන්ධ ඇඳ තිබෙයි. කප්පියේ අක්ෂය තිරස් වන අතර එය ඝර්ෂණය නොමැති ව භ්‍රමණය වෙයි. තන්තුව ලිස්සීම වැළැක්වීමට ප්‍රමාණවත් තරම් කප්පිය රළු ය. ආරම්භයේ දී ස්කන්ධ සිරස් ලෙස එල්ලෙයි. ස්කන්ධ නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හළ විට, කප්පියේ කෝණික ත්වරණය

$$\frac{2(m - m')g}{a(M + 2m + 2m')}$$

බව සාධනය කරන්න. තන්තුවේ කොටස් දෙකෙහි ආතතිවල අනුපාතය සොයන්න.

ආරම්භයේ දී, m ස්කන්ධය, තැටියේ තිරස් විෂ්කම්භයේ එක කෙළවරක් ස්පර්ශ වෙමින් තිබෙයි නම්, මෙම චලිතය පවතින්නේ

$$\sqrt{\frac{(l - \pi a)(M + 2m + 2m')}{(m - m')g}}$$

කාලයක් සඳහා බව ද සාධනය කරන්න.